Wenn Form und Inhalt übereinstimmen …

Aufgabe 41

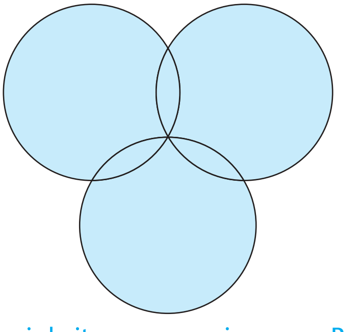
Gegeben ist ein Dreieck mit dem Flächeninhalt $A = 84\ cm^2$. Seine Seitenlängen können in cm durch drei aufeinander folgende natürliche Zahlen ausgedrückt werden.

Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreiecks.

Aufgabe 42

Drei kongruente Kreise schneiden sich so, dass sie genau einen gemeinsamen Randpunkt haben und ihre Mittelpunkte ein gleichseitiges Dreieck bilden.

Die Menge aller inneren und Randpunkte dieser drei Kreise wird durch ein Flächenstück dargestellt, dessen Inhalt mit A bezeichnet ist.



Berechnen Sie A in Abhängigkeit vom gemeinsamen Radius r dieser Kreise.

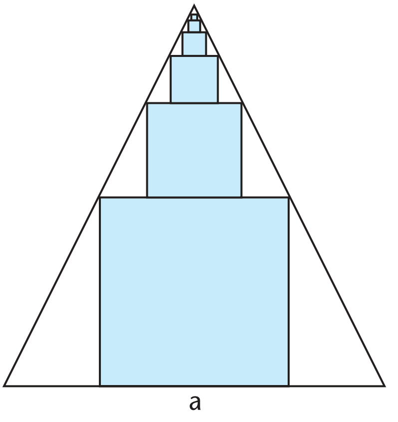
Aufgabe 43

Gegeben ist ein kegelförmiges Gefäß, dessen Schnittfläche mit jeder Ebene durch seine Höhe ein gleichseitiges Dreieck ist. Dieses Gefäß steht auf der Spitze und ist vollständig mit Wasser gefüllt. Ferner befindet sich in ihm eine Kugel mit dem Radius r, welche die Wasseroberfläche und den Kegelmantel berührt.

Wie hoch steht das Wasser in dem Kegel, wenn die Kugel herausgenommen wird?

Aufgabe 44

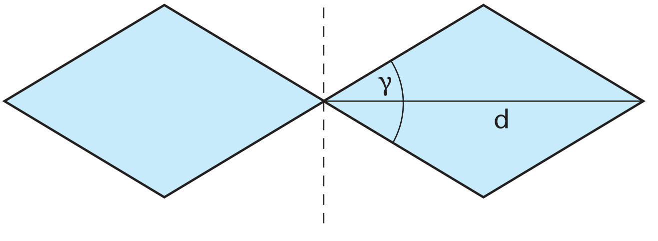
Einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge a ist eine Folge von Rechtecken wie abgebildet einbeschrieben. Dabei ist eine Seite des ersten Rechtecks halb so lang wie die Dreiecksseite, auf der sie liegt. Eine Seite des zweiten Rechtecks ist halb so lang wie die Seite des ersten Rechteckes, auf der sie liegt. Eine Seite des dritten Rechtecks ist halb so lang wie die Seite des zweiten Rechtecks, auf der sie liegt, usw.



Wie groß ist die Summe der Flächeninhalte aller Rechtecke dieser unendlichen Folge?

Aufgabe 45

Eine Raute mit der größeren Diagonale d und dem spitzen Winkel γ wird um die Achse gedreht, die durch einen Endpunkt der größeren Diagonale senkrecht zu dieser in der Ebene der Raute verläuft.



Welches Volumen besitzt der entstehende Rotationskörper?

Gleichungen der besonderen Art …

Aufgabe 46

Bei einer geometrischen Zahlenfolge entsteht jedes neue Folgenglied durch Multiplizieren des Vorgängers mit einem konstanten Faktor q.

Bei einer arithmetischen Zahlenfolge entsteht jedes neue Folgenglied durch Addieren eines konstanten Summanden d zum Vorgänger.

Vier Zahlen bilden eine geometrische Zahlenfolge. Subtrahiert man von ihnen 2, 1, 7 und 27, dann bilden die neuen Zahlen eine arithmetische Zahlenfolge.

Wie heißen die beiden Zahlenfolgen?

Aufgabe 47

Gegeben ist die Gleichung

$x^4 - 2x^2 - 400x = 9\,999.$

Bestimmen Sie mit elementaren Methoden alle Lösungen dieser Gleichung.

Aufgabe 48

Gegeben ist das Gleichungssystem

$$kx - 3y = 18$$
$$\frac{x}{k} + 5y = 2$$

mit der Bedingung $k \neq 0$.

Für welche ganzen Zahlen k hat das Gleichungssystem negative rationale Lösungen x und y?

Aufgabe 49

Die kubische Gleichung

$4x^3 - 16x^2 - 9x + 36 = 0$

soll unter der Bedingung gelöst werden, dass zwei der Lösungen Gegenzahlen voneinander sind.

Welches sind die Lösungen dieser Gleichung?

Aufgabe 50

Louise und Ina vertreiben sich gern die Zeit mit mathematischen Problemen. Heute wählt Louise eine von 0 und 1 verschiedene reelle Zahl p und bestimmt dazu die Zahl $q = 1 - p$. Sie nennt Ina beide Zahlen und fordert sie auf, ihrerseits zwei reelle Zahlen a und b ungleich 0 so anzugeben, dass die Gleichung

$\frac{p}{a} + \frac{q}{b} = \frac{1}{pa + qb}$

erfüllt ist.

Nach längerem Probieren findet Ina zwei Zahlen a und b, die aber gleich sind. Auch als Louise andere Zahlen für p und q wählt, findet Ina immer nur zwei Zahlen a und b, die gleich sind.

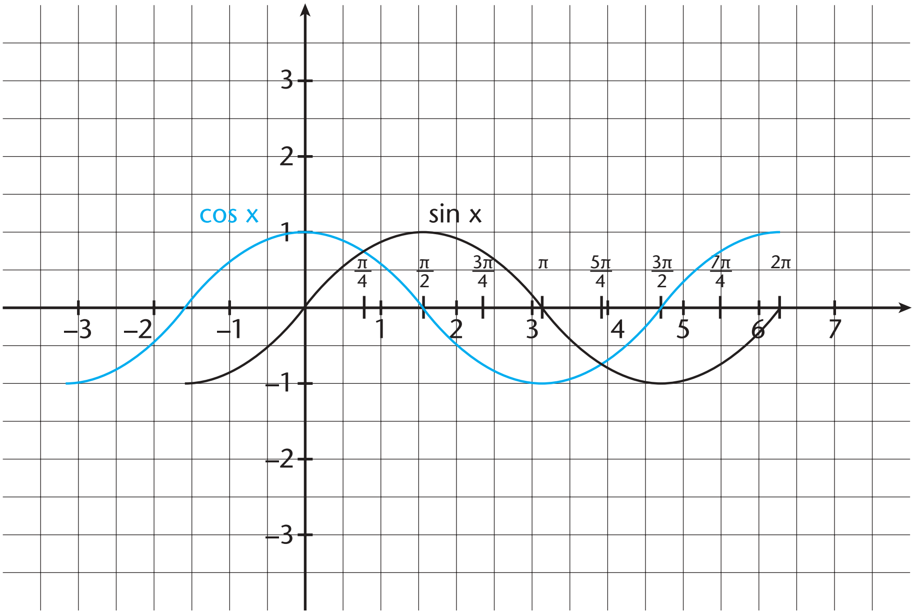
Zeigen Sie, dass unter den gegebenen Voraussetzungen stets $a = b$ gilt.

Eine Partie Trigonometrie …

Aufgabe 51

a) Zeigen Sie ohne Taschenrechner, dass $\cos\frac{\pi}{5} \cdot \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$ gilt.

b) Zeigen Sie ohne Taschenrechner, dass $\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2}$ gilt.



Aufgabe 52

Gegeben ist die Gleichung

$(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x.$

Gesucht sind alle Lösungen dieser Gleichung.

Aufgabe 53

Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Katheten a und b, wobei b um 5 cm länger ist als a. Weiter gilt $\cos(\beta + \gamma) + 2\sin\alpha = 0$.

Wie lang sind die Katheten, und wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC?

Aufgabe 54

Für welche reellen Zahlen x gilt

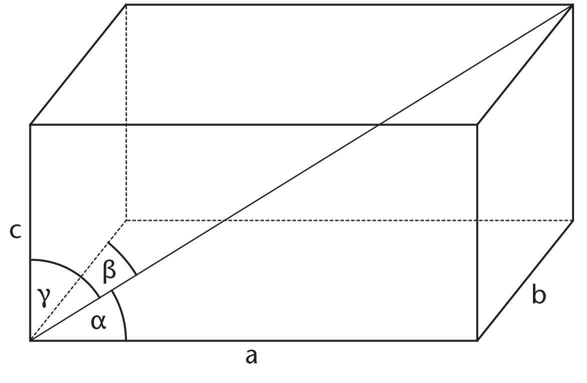
$2\left((\sin x)^6 + (\cos x)^6\right) + 1 = 3\left((\sin x)^4 + (\cos x)^4\right)$?

Aufgabe 55

Gegeben ist ein Quader mit den Kantenlängen a, b und c.

Die Raumdiagonale schließt mit den Kanten a, b und c die Winkel α, β und γ ein.

Wir betrachten den Term $T = (\sin \alpha)^2 + (\sin \beta)^2 + (\sin \gamma)^2$.



Weisen Sie nach, dass T für alle Quader den gleichen Wert annimmt, und bestimmen Sie diesen Wert.

Möglichst viel Ertrag bei möglichst wenig Aufwand …

Aufgabe 56

Gegeben ist das Gleichungssystem

$$7x + 5y - z = 8$$
$$y + z = 11.$$

Gesucht sind alle Lösungstripel $(x|y|z)$ mit natürlichen Zahlen x, y und z, für die x den kleinstmöglichen Wert annimmt.

Aufgabe 57

Die 1007 Teilnehmer eines Kongresses besichtigen eine berühmte Sehenswürdigkeit. Dazu sollen sie auf möglichst wenige Autobusse mit 13, 29 bzw. 41 Plätzen so verteilt werden, dass kein Platz leer bleibt.

Wie viele Autobusse sind zu bestellen?

Aufgabe 58

Für die reellen Zahlen x, y und z gilt

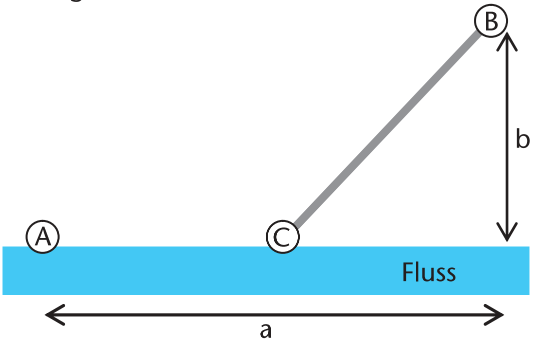
$x + y = z - 1$
und
$xy = z^2 - 7z + 14.$

Welches ist der kleinstmögliche Wert, und welches ist der größtmögliche Wert für $x^2 + y^2$, und für welchen Wert von z werden diese Werte jeweils angenommen?

Aufgabe 59

Am Ufer eines Flusses liegt die Stadt A. Von dort aus sollen Waren zu einem Ort B gebracht werden, der b km vom Fluss entfernt liegt. Der Transport soll auf dem Wasserweg bis zur Stelle C erfolgen und dann auf einer Straße bis zum Ort B.

Die Transportkosten je Tonnenkilometer sind auf dem Landweg doppelt so hoch wie auf dem Wasserweg.



Unter welchem Winkel ist die Straße von B aus zum Fluss zu legen, damit die Transportkosten von A nach B insgesamt am niedrigsten sind?

Aufgabe 60

Eine Ziegelei Z_1 produziert in einer gewissen Zeit 6 Millionen und eine andere Ziegelei Z_2 in der gleichen Zeit 12 Millionen Ziegel. Diese beiden Ziegeleien versorgen vier Baustellen mit Ziegeln, wobei die Baustelle B_1 einen Bedarf von 5,2 Millionen, die Baustelle B_2 von 3,0 Millionen, die Baustelle B_3 von 5,7 Millionen und die Baustelle B_4 einen Bedarf von 4,1 Millionen Ziegeln hat.

Die Entfernungen (in km) von jeder der Ziegeleien zu jeder der Baustellen sind aus folgender Tabelle ersichtlich:

	B_1	B_2	B_3	B_4
Z_1	28	30	37	21
Z_2	26	36	18	20

Weiter wird vorausgesetzt, dass die Transportkosten je Ziegel zur Entfernung proportional sind und dass B_3 nur von Z_2 beliefert wird.

Wie viele Ziegel erhält jede Baustelle von jeder Ziegelei, wenn die gesamten Transportkosten möglichst gering sind?

Um die Ecke gedacht…

Aufgabe 61

1. Jeder Vater von sieben Töchtern, der Russisch kann, trägt einen Hut, selbst wenn er eine Brille braucht.
2. Jeder Mann, der eine Brille braucht, hat sieben Töchter oder kann Russisch sprechen.
3. Kein Mann, der nicht sieben Töchter hat, braucht eine Brille, es sei denn, er trägt einen Hut.
4. Jeder Mann, der sieben Töchter hat und eine Brille braucht, kann Russisch.
5. Kein Mann, der einen Hut trägt, hat sieben Töchter.

Vorausgesetzt, dass diese Sätze sämtlich wahr sind, was können wir dann über Männer sagen, die eine Brille brauchen?

Aufgabe 62

Vier Freunde A, B, C und D verstecken einen Brief. Einer von ihnen nimmt ihn an sich. Anschließend macht jeder von ihnen die folgenden drei Aussagen, von denen wenigstens jeweils zwei wahr sind.

A: a) „Wenn ich den Brief nicht habe, dann hat ihn C."
b) „Ich habe den Brief nicht."
c) „Mein Freund hat den Brief."

B: a) „Entweder A oder C haben den Brief."
b) „Alle Aussagen von A sind wahr."
c) „D hat den Brief nicht."

C: a) „Wenn ich den Brief nicht habe, dann hat ihn B."
b) „Ich habe den Brief."
c) „B macht keine falschen Aussagen."

D: a) „Ich habe den Brief nicht."
b) „Entweder hat A den Brief, oder er hat ihn nicht."
c) „B hat sich das Spiel ausgedacht."

Wer hat den Brief?

Aufgabe 63

Vier Schüler, die auch noch nebeneinander sitzen, bringen ihre Lehrer dadurch zur Verzweiflung, dass diese ihre Namen nicht auseinander halten können. Das ist auch verständlich, denn sowohl die Vornamen als auch die Nachnamen der vier Schüler sind Dietrich, Günther, Hermann und Ludwig.

Darüber ist bekannt:

1. Kein Schüler hat den gleichen Vornamen und Nachnamen.
2. Hermann heißt nicht Hermann Dietrich.
3. Der Nachname von Günther ist zugleich der Vorname des Schülers, dessen Nachname gleich dem Vornamen des Schülers ist, der den Nachnamen Ludwig hat.

Wie heißen die vier Schüler mit vollem Namen?

Aufgabe 64

Ein Ehepaar war mit seinem Wagen auf Urlaubsreise. In einer unwirtlichen Gegend kamen sie an eine Kreuzung, von der aus drei Wege weiter führten. Von einem Hinweisschild war weit und breit nichts zu sehen, wohl aber standen dort vier Männer. Der Ehemann auf dem Beifahrersitz fragte, welcher der drei Wege in die Stadt führen würde, und erhielt folgende Auskunft:

Erster Mann:
1. „Der dritte Weg führt nicht in die Stadt."
2. „Der zweite Weg führt in die Stadt."
3. „Der zweite Mann sagt immer die Wahrheit."

Zweiter Mann:
1. „Der erste Mann irrt, wenn er sagt, dass der zweite Weg in die Stadt führt."
2. „Der erste Weg führt in die Stadt."
3. „Der dritte Mann gibt nie falsche Auskünfte."

Dritter Mann:
1. „Der dritte Weg führt in die Stadt."
2. „Der erste Mann gibt immer falsche Auskünfte."
3. „Ich gebe nur richtige Auskünfte."

„Sie müssen aber wissen", ergänzte der vierte Mann, der kein Lügner war, „dass von diesen drei Männern einer stets gelogen, einer immer die Wahrheit gesagt und einer sowohl gelogen als auch die Wahrheit gesagt hat."
Der Ehemann sah erst die Männer, dann seine Frau eine Weile nachdenklich an, bis diese zu ihm sagte: „Liebling, ich weiß jetzt, welchen der drei Wege ich fahren muss, damit wir in die Stadt kommen."

Welches ist der richtige Weg in die Stadt?

Aufgabe 65

An einem Unfall waren sieben Autos beteiligt, die an einer Ampel hintereinander standen. Es waren nur gelbe und blaue Autos in der Kolonne. Kein gelbes Auto stand direkt vor oder direkt hinter einem anderen gelben Auto. Genau ein blaues Auto stand direkt zwischen zwei gelben Autos. Genau ein gelbes Auto stand direkt zwischen zwei blauen Autos. Genau drei blaue Autos standen direkt hintereinander.

In welcher Reihenfolge können die Autos an der Ampel gehalten haben?

Kombinieren hilft wahrscheinlich …

Aufgabe 66

An einer Wurfbude auf dem Jahrmarkt zielen drei ungeschickte Leute auf eine Figur. Jeder verfügt nur über einen Ball. Der Erste trifft mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$, der Zweite trifft mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ und der Dritte mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$.

Ist es wahrscheinlicher, dass die Figur von einem oder von drei Bällen getroffen wird?

Aufgabe 67

Vor der Kasse eines Fußballstadions stehen bereits mehrere Leute. Daher entschließt sich der Kassierer, vorzeitig mit dem Kartenverkauf zu beginnen, obwohl ihm das Wechselgeld noch nicht gebracht worden ist. Eine Eintrittskarte kostet 10 €.

Unter den ersten 10 Personen in der Schlange haben genau 5 nur einen 10 €-Schein und die anderen 5 nur einen 20 €-Schein dabei.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Kassierer diesen ersten 10 Zuschauern ohne Wechselprobleme eine Karte verkaufen kann?

Aufgabe 68

Zwei befreundete Damenclubs veranstalten ein Tennisturnier. Jedes Mitglied des Clubs A hat gegen mindestens ein Mitglied des Clubs B gespielt und umgekehrt. Kein Mitglied hat gegen alle Mitglieder des anderen Clubs gespielt.

Lassen sich in jedem Club genau zwei so Damen finden, dass jede der beiden ausgewählten Damen des einen Clubs gegen genau eine der beiden ausgewählten Damen des anderen Clubs gespielt hat?

Aufgabe 69

Auf einer Strecke der Länge 1 werden zwei Punkte P und Q zufällig ausgewählt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ihr Abstand mindestens eine halbe Längeneinheit beträgt?

Aufgabe 70

In Obskurien gibt es fünf Städte, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Die Regierung will diese Städte durch ein Eisenbahnnetz verbinden, das aus vier geradlinigen Strecken bestehen soll. Die Schienenstränge können sich dabei überschneiden; an den betreffenden Stellen werden Brücken gebaut.

Wie viele verschiedene solcher Eisenbahnnetze sind denkbar?

Geld regiert die Welt …

Aufgabe 71

In Utopien musste jeder Hausbesitzer den 10. Teil der eingenommenen Miete als Steuer abführen. Zu einem späteren Zeitpunkt wurde dieser Steuersatz auf den 8. Teil erhöht.

Um wie viel müsste ein Hausbesitzer seine Miete steigern, um bei der erhöhten Steuer noch ebenso viel von der Miete übrig zu behalten wie früher?

Aufgabe 72

In einem Spielwarengeschäft gibt es vier Sorten bunter Glaskugeln zu kaufen.

Eine Kugel der ersten Sorte wiegt 1 g und kostet 4 Cent.
Eine Kugel der zweiten Sorte wiegt 4 g und kostet 9 Cent.
Eine Kugel der dritten Sorte wiegt 8 g und kostet 12 Cent.
Eine Kugel der vierten Sorte wiegt 10 g und kostet 18 Cent.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, um für genau 10 € genau 100 Kugeln zu kaufen, die genau 500 g wiegen?

Aufgabe 73

Ein Bauer wollte bei einem Viehhändler mehrere Tiere kaufen. Der Viehhändler verlangte für jedes den gleichen Preis. Dem Bauer gelang es, diesen Preis um genau so viel Prozent des geforderten Preises herunterzuhandeln, wie er in Euro betragen sollte.

Er bezahlte jetzt 21 € für jedes Tier. Bei dem ursprünglichen Preis hätte sein Geld genau für drei Tiere gereicht. Jetzt konnte er mehr Tiere kaufen, wobei er sein Geld vollständig ausgab.

Wie viele Tiere konnte der Bauer insgesamt kaufen?

Aufgabe 74

Drei Schwestern kamen mit Küken auf den Markt. Eine brachte 10 Küken zum Verkauf mit, die andere 16 Küken, die dritte 26 Küken. Bis Mittag verkauften sie einen Teil ihrer Küken für ein und denselben Preis. Nachmittags senkten sie den Preis, da sie befürchteten, dass nicht alle Küken verkauft werden. Sie verkauften deshalb die restlichen Küken für einen gesenkten einheitlichen Preis und kehrten alle drei mit dem gleichen Erlös nach Hause zurück: Jede Schwester nahm 35 € ein.

Für welchen Preis verkauften sie die Küken vormittags und für welchen Preis nachmittags?

Aufgabe 75

Das Testament eines hochbetagt Verstorbenen enthielt ein Vermächtnis an Zuwendungen, das so sonderbar und exzentrisch war wie der Mann selbst. Er legte folgende vier Bestimmungen fest:

1. Die Höhe jeder Zuwendung muss gleich und so niedrig wie möglich sein.
2. Jede Zuwendung muss aus einem Betrag in vollen Euro bestehen.
3. Die Anzahl der Zuwendungen muss so klein wie möglich sein.
4. Jeder Erbe muss einen gleichen Anteil von 1001 € und zusätzlich noch n € erhalten, wobei n die Anzahl der Erben ist.

Die Testamentsvollstrecker wussten weder, was sie auszahlen sollten, noch wie viele Erben in Betracht kamen.

Wie viele Zuwendungen in welcher Höhe sieht das Testament vor?

Zwei Schritte vor und einen zurück …

Aufgabe 76

Sabine ging mit ihrer Mutter mit der Geschwindigkeit 3 km/h gemütlich die gerade Einkaufsstraße entlang. Plötzlich fiel ihr ein, dass sie einen Brief in den etwas entfernten Briefkasten werfen sollte, und zwar so rasch wie möglich. Sie ließ ihre Mutter in Ruhe weitergehen und lief selbst in der gleichen Richtung mit 5 km/h voraus. Nach dem Einwurf kam sie genauso schnell zurück und stellte fest, dass sie ihre Mutter nur 3 Minuten allein gelassen hatte.

Wie weit war Sabine von dem Briefkasten entfernt, als beide sich trennten?

Aufgabe 77

Die beiden Freunde Werner und Bernd stehen einander an den Ufern der breitesten Stelle eines Sees gegenüber. Sie springen gleichzeitig ins Wasser und schwimmen aufeinander zu, wobei jeder die gesamte Zeit über seine Geschwindigkeit beibehält. Im Abstand von 324 m vom näheren Ufer schwimmen sie zum ersten Mal aneinander vorbei, wenden sofort, als sie das gegenüberliegende Ufer erreicht haben, und schwimmen wieder einander entgegen. Als sie sich zum zweiten Male begegnen, sind sie 216 m vom anderen Ufer entfernt.

Als sie sich später außerhalb des Wassers treffen, sagt Werner zu Bernd: „Ich weiß jetzt, wie breit der See ist."

Wie breit ist der See?

Aufgabe 78

In einer Filmkamera und in einem Filmprojektor laufen in jeder Sekunde genau 16 Bilder ab. Auf der Leinwand bewegt sich ein Auto, dessen Räder in Wirklichkeit einen Durchmesser von genau einem Meter haben. Diese Räder führen auf der Leinwand in jeder Sekunde genau vier Umdrehungen durch.

Wie groß war die kleinstmögliche gleich bleibende Geschwindigkeit des Autos zu der Zeit, als es gefilmt wurde?

Aufgabe 79

Die Entfernung zwischen den Ortschaften A und B beträgt 100 km. Von A fahren in Richtung B gleichzeitig zwei Mopeds ab. Die Geschwindigkeit des ersten ist 10 km/h höher als die des zweiten.

Das erste Moped hielt auf der Strecke 50 Minuten lang an.

In welchem Bereich muss die Geschwindigkeit des ersten Mopeds liegen, wenn es nicht später als das zweite Moped in B eintreffen soll?

Aufgabe 80

Ein Lokomotivführer bemerkte am Anfang eines 20 km langen Streckenabschnitts, dass er eine Verspätung von genau 4 Minuten hatte. Er fuhr daraufhin diese Strecke mit einer um 10 km/h höheren Durchschnittsgeschwindigkeit, als sie der Fahrplan vorsah. Am Ende dieses Streckenabschnitts war erstmals wieder Übereinstimmung mit dem Fahrplan erreicht.

Wie groß war die für diesen Streckenabschnitt vorgesehene fahrplanmäßige Durchschnittsgeschwindigkeit?

Von der Anschauung zur Lösung ...

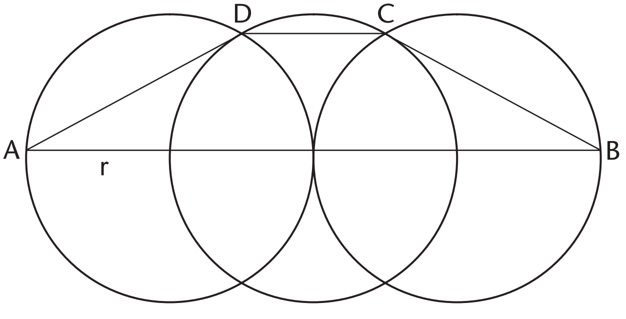
Aufgabe 81

In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$ teilt die Winkelhalbierende von β die gegenüberliegende Seite AC in zwei Abschnitte von 4 cm bzw. 5 cm Länge.

Wie lang sind die Seiten des Dreiecks ABC?

Aufgabe 82

Drei kongruente Kreise liegen wie in der Zeichnung angegeben. Ihr gemeinsamer Radius ist mit r bezeichnet.



Flächeninhalt und Umfang des Vierecks ABCD in Abhängigkeit von r sind gesucht.

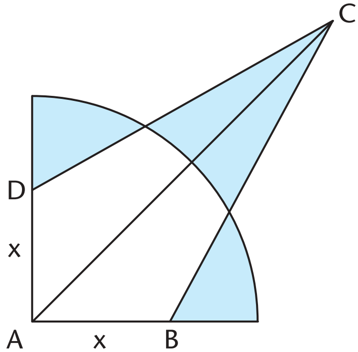
Aufgabe 83

Vier Radarstationen A, B, C, D bilden ein ebenes Rechteck. Sie orten die Landekapsel L eines Raumschiffs. Diese hat von A den Abstand a = 60 km, von B den Abstand b = 90 km und von D den Abstand d = 20 km.

Welchen Abstand c hat die Landekapsel von C?

Aufgabe 84

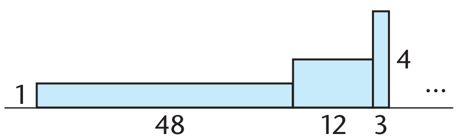
In der Figur sind die beiden gefärbten Kreisteile kongruent und haben zusammen den gleichen Flächeninhalt wie das außerhalb des Viertelkreises liegende gefärbte Flächenstück. Ferner ist $\overline{AC}$ = 2 Meter und der Radius des Viertelkreises beträgt 1 Meter.



Wie lang ist die Strecke x?

Aufgabe 85

Eine Figur wird folgendermaßen aus unendlich vielen Rechtecken gebildet: Die Rechtecke werden auf einer gemeinsamen Grundlinie aneinandergelegt, wobei die Längen der waagerechten Seiten im Verhältnis 4 : 1 abnehmen und die Längen der senkrechten Seiten im Verhältnis 1 : 2 zunehmen. Das erste Rechteck ist 48 cm breit und 1 cm hoch.



Welchen Flächeninhalt besitzt die so gebildete Figur?