

B Quadratwurzeln – Reelle Zahlen

1 Quadratwurzeln

Ein Quadrat habe einen Flächeninhalt von 64 cm^2 . Will man wissen, wie lang die Seiten des Quadrates sind, so muss man herausfinden, welche positive Zahl mit sich selbst multipliziert das Ergebnis 64 liefert. Es ist die Zahl 8, denn $8 \cdot 8 = 64$. Man schreibt hierfür auch $\sqrt{64} = 8$ (lies: „Die Wurzel aus 64 ist 8.“). Das Quadrat hat also die Seitenlänge 8 cm. Ganz allgemein gilt: Diejenige nicht negative Zahl, die mit sich selbst multipliziert a ergibt, heißt **Quadratwurzel** aus a (Wurzel aus a). Man schreibt hierfür \sqrt{a} . Die nichtnegative Zahl a heißt **Radikand**.
Merke: Für $a \geq 0$ ist $\sqrt{a} \geq 0$ und $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$.

Beispiele

- a) $\sqrt{25} = 5$, denn $5 \cdot 5 = 25$ und $5 \geq 0$.
- b) $\sqrt{2,25} = 1,5$, denn $1,5 \cdot 1,5 = 2,25$ und $1,5 \geq 0$.
- c) $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$, denn $\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$ und $\frac{3}{2} \geq 0$.
- d) $(-2) \cdot (-2) = 4$, aber $\sqrt{4} \neq -2$, denn Wurzeln sind nie negativ.
- e) $\sqrt{-25}$ ist nicht definiert, denn der Radikand darf nicht negativ sein.
- f) $\sqrt{5}$ können wir nur näherungsweise ermitteln. Wir geben beim Taschenrechner $\sqrt{\square}\square\square$ ein und erhalten den Näherungswert 2,23606798.

Aufgaben

1. Ermittle die Quadratwurzel ohne Hilfe eines Taschenrechners.
 - a) $\sqrt{9}$
 - b) $\sqrt{4}$
 - c) $\sqrt{100}$
 - d) $\sqrt{144}$
 - e) $\sqrt{49}$
 - f) $\sqrt{1}$
 - g) $\sqrt{81}$
 - h) $\sqrt{169}$
2. a) $\sqrt{\frac{4}{9}}$ b) $\sqrt{\frac{16}{25}}$ c) $\sqrt{\frac{1}{36}}$ d) $\sqrt{\frac{121}{225}}$
3. Gib ohne TR an, zwischen welchen beiden natürlichen Zahlen die Quadratwurzel liegt. Bestimme anschließend mit Hilfe des TR einen auf fünf Dezimalen gerundeten Näherungswert für die Quadratwurzel.
 - a) $\sqrt{10}$
 - b) $\sqrt{20}$
 - c) $\sqrt{70}$
 - d) $\sqrt{180}$

4. a) Berechne. Du darfst auch einen TR benutzen.

$$\sqrt{400} = \square \quad \sqrt{4} = \square \quad \sqrt{0,04} = \square \quad \sqrt{0,0004} = \square$$

$$\sqrt{0,0144} = \square \quad \sqrt{1,44} = \square \quad \sqrt{144} = \square \quad \sqrt{14400} = \square$$

- b) Ergänze: Verschiebt man das Komma beim Radikanden um zwei, vier, sechs, ... Stellen nach rechts bzw. links,

so _____

5. Berechne ohne TR. Nutze die Erkenntnisse aus Aufgabe 4.

a) $\sqrt{9} = \square$ $\sqrt{900} = \square$ $\sqrt{0,09} = \square$ $\sqrt{0,0009} = \square$

b) $\sqrt{196} = \square$ $\sqrt{1,96} = \square$ $\sqrt{19600} = \square$ $\sqrt{0,0196} = \square$

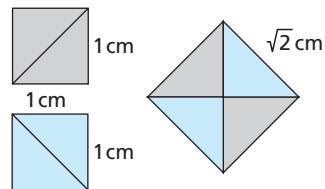
6. Ein 18 m langes und 32 m breites rechteckiges Grundstück soll gegen ein quadratisches Grundstück mit gleichem Flächeninhalt getauscht werden.

7. Berechne im Kopf.

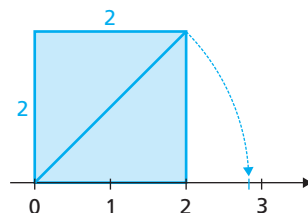
a) $\sqrt{0}$ b) $\sqrt{10^6}$ c) $\sqrt{\sqrt{16}}$ d) $\sqrt{4 \cdot \sqrt{81}}$

- ▲ 8. Ein Würfel hat einen Oberflächeninhalt von 384 cm^2 ($13,5 \text{ m}^2$). Berechne sein Volumen.

9. Zwei Quadrate mit je 1 cm Seitenlänge werden entlang einer Diagonale halbiert. Die vier entstehenden Dreiecke werden dann zu einem neuen Quadrat zusammengesetzt. Begründe, dass das neue Quadrat eine Seitenlänge von $\sqrt{2}$ cm besitzt.



- ▲ 10. Die Zeichnung zeigt ein Quadrat mit der Seitenlänge 2 cm. Welche Zahl wird durch die gezeigte Vorgehensweise auf der Zahlengeraden markiert? Begründe.



2 Reelle Zahlen

Alle rationalen Zahlen können als Brüche dargestellt werden, wobei Zähler und Nenner ganze Zahlen sind. Der Nenner darf jedoch nicht Null sein.

Gibt man rationale Zahlen als Dezimalzahlen an, so gibt es drei mögliche Fälle, wie die folgenden Beispiele zeigen:

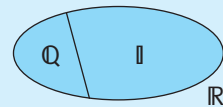
$$-\frac{11}{8} = -1,375 \quad \text{ist eine abbrechende Dezimalzahl.}$$

$$\frac{2}{3} = 0,6666\dots = 0,\overline{6} \quad \text{ist eine reinperiodische Dezimalzahl.}$$

$$\frac{7}{12} = 0,583333\dots = 0,58\overline{3} \quad \text{ist eine gemischt-periodische Dezimalzahl.}$$

$\sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{5}; \sqrt{6}$ sind Beispiele für Zahlen, die man nicht als gewöhnliche Brüche darstellen kann. Man nennt solche Zahlen **irrationale Zahlen**. Schreibt man eine irrationale Zahl als Dezimalzahl, so ist diese weder abbrechend noch periodisch und besitzt unendlich viele Dezimalen.

Die Menge \mathbb{Q} der rationalen Zahlen und die Menge \mathbb{I} der irrationalen Zahlen ergeben zusammen die **Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen**.



Beispiel 1

- $\sqrt{8}$ ist eine irrationale Zahl und kann nicht als gewöhnlicher Bruch dargestellt werden. Mit dem TR erhält man $\sqrt{8} = 2,828427125\dots$
- $\sqrt{9}$ ist keine irrationale Zahl, sondern eine rationale Zahl, denn es ist $\sqrt{9} = 3 = \frac{3}{1}$.
- $-\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl, denn $-\sqrt{2} = -1 \cdot \sqrt{2}$, und da man $\sqrt{2}$ nicht als gewöhnlichen Bruch darstellen kann, kann man auch $-1 \cdot \sqrt{2} = -\sqrt{2}$ nicht als gewöhnlichen Bruch darstellen.

Aufgaben

11. Gib drei irrationale Zahlen zwischen 1 und 10 an.

12. a) Ordne zu: $\sqrt{7}; \sqrt{25}; -\sqrt{36}; 2,3478; -3,1010010001\dots; 4,578\overline{32}$

rationale Zahlen:

irrationale Zahlen:

b) Ordne die Zahlen nun der Größe nach.

Beispiel 2

Eine Quadratwurzel, z. B. $\sqrt{6}$, kann näherungsweise durch eine Intervallschachtelung bestimmt werden, indem man schrittweise immer kleinere Intervalle angibt, in denen $\sqrt{6}$ liegt. Die folgende Tabelle zeigt ein Beispiel hierfür.

linke Intervallgrenze	rechte Intervallgrenze	Begründung
2	3	$2 < \sqrt{6} < 3$, denn $2^2 < 6 < 3^2$
2,4	2,5	$2,4 < \sqrt{6} < 2,5$, denn $2,4^2 < 6 < 2,5^2$
2,44	2,45	$2,44 < \sqrt{6} < 2,45$, denn $2,44^2 < 6 < 2,45^2$
2,449	2,450	$2,449 < \sqrt{6} < 2,450$, denn $2,449^2 < 6 < 2,450^2$
2,4494	2,4495	$2,4494 < \sqrt{6} < 2,4495$, denn $2,4494^2 < 6 < 2,4495^2$
2,44948	2,44949	$2,44948 < \sqrt{6} < 2,44949$, denn $2,44948^2 < 6 < 2,44949^2$

Mit diesen Ergebnissen können wir sicher sein, dass $\sqrt{6}$ mit der Ziffernfolge 2,44948... beginnt, und wir können runden: $\sqrt{6} \approx 2,4495$.

13. Gib nach dem oben gezeigten Beispiel eine Intervallschachtelung für $\sqrt{12}$ an. Führe sie so weit aus, bis du auf drei Dezimalen runden kannst.

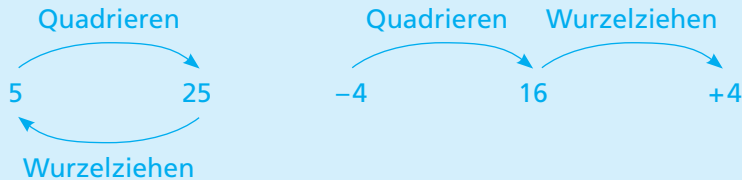
Aufgaben

linke Intervallgrenze	rechte Intervallgrenze	Begründung
3	4	$3 < \sqrt{12} < 4$, denn

14. Beurteile die folgenden Aussagen.
- Zwischen zwei reellen Zahlen gibt es immer weitere reelle Zahlen.
 - Die Null ist keine reelle Zahl.
 - Das Produkt zweier irrationalen Zahlen ist wieder eine irrationale Zahl.
 - ▲ Die Summe aus einer rationalen und einer irrationale Zahl ist irrational.

3 Wurzelziehen und Quadrieren

Beim Quadrieren wird eine Zahl mit sich selbst multipliziert. Jede reelle Zahl kann quadriert werden, das Ergebnis ist stets nicht negativ.



Das Wurzelziehen kann man nur mit nichtnegativen reellen Zahlen durchführen. Das Ergebnis ist wieder nichtnegativ.

Ist die Ausgangszahl nichtnegativ, z. B. 5, so wird das Quadrieren der Zahl durch das Wurzelziehen rückgängig gemacht. Man sagt für diesen Fall auch: Das Wurzelziehen ist die Umkehrung des Quadrierens.

Ist die Ausgangszahl hingegen negativ, z. B. -4 , so ist das Wurzelziehen nicht die Umkehrung des Quadrierens.

Allgemein gilt also: $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$ oder in Kurzform: $\sqrt{a^2} = |a|$.

Beispiel 1

- a) $\sqrt{4^2} = \sqrt{16} = 4$
- b) $\sqrt{-16}$ existiert nicht, denn $-16 < 0$
- c) $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$
- d) $\sqrt{-5^2}$ existiert nicht, denn $-5^2 = -25$

Beispiel 2

- a) $\sqrt{1,75^2} = 1,75$
- b) $\sqrt{(-3,18)^2} = 3,18$
- c) $\sqrt{(-2)^4} = \sqrt{16} = 4$

Aufgaben

15. Setze eines der Zeichen = oder \neq passend ein. Es sei $x \neq 0$.

- a) $(-4)^2$ 4^2
- b) -3^2 3^2
- c) $(-2)^8$ 2^8
- d) $(-x)^2$ x^2
- e) $-x^2$ x^2
- f) $(-x)^6$ x^6

16. Berechne im Kopf.

- a) $\sqrt{(-7)^2}$
- b) $\sqrt{-2,5^2}$
- c) $\sqrt{(-1)^4}$
- d) $\sqrt{(-3)^4}$
- e) $\sqrt{|-16|}$
- f) $\sqrt{(-10)^6}$

Die Gleichung $x^2 = 4$ hat zwei verschiedene Lösungen, nämlich 2 und (-2) , denn $2 \cdot 2 = 4$ und ebenso $(-2) \cdot (-2) = 4$. Es ist also $L = \{-2; 2\}$.

Auch die Gleichung $x^2 = 2$ hat zwei Lösungen. Sie lauten $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$, denn $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ und $(-\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2}) = 2$. Es ist $L = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$.

Die Gleichung $x^2 = 0$ hat nur eine Lösung, nämlich 0. Es ist $L = \{0\}$.

Die Gleichung $x^2 = -4$ hingegen hat keine Lösung, denn keine reelle Zahl ergibt quadriert die Zahl -4 . Es ist also $L = \{\}$.

Ganz allgemein gilt: Die Gleichung $x^2 = a$ hat

(1) die beiden Lösungen $-\sqrt{a}$ und \sqrt{a} , falls $a > 0$,

(2) die Lösung 0, falls $a = 0$ und

(3) keine Lösung, falls $a < 0$.

a) Die Gleichung $x^2 = 5$ hat die Lösungen $\sqrt{5}$ und $-\sqrt{5}$, es ist $L = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$.

b) Die Gleichung $x^2 - 3 = 18$

0 formen wir zunächst um zu $x^2 = 3$.

Nun können wir die Lösungsmenge ablesen: $L = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$.

c) Die Gleichung $x^2 + 9 = 0$ formen wir zunächst um zu $x^2 = -9$. Nun erkennen wir, dass diese Gleichung keine Lösung hat; es ist $L = \{\}$.

Beispiel 3

Beispiel 4

Der Wurzelterm $\sqrt{2x+8}$ ist für solche Zahlen x definiert, für die sein Radikand $2x+8$ nicht negativ ist, also für alle Lösungen der Ungleichung $2x+8 \geq 0$.

Durch Äquivalenzumformungen erhalten wir $x \geq -4$. Die Definitionsmenge D des Wurzelterms lautet also $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -4\}$.

Aufgaben

17. Bestimme die Lösungsmenge ohne TR.

a) $x^2 = 81$

b) $x^2 = 12^2$

c) $x^2 = -100$

d) $x^2 - 5 = 20$

e) $x^2 = (-4)^2$

f) $x^2 = -7^2$

g) $2x^2 - 34 = 0$

h) $27 - 3x^2 = 0$

18. a) $x^2 = 0$

b) $x^2 = \frac{25}{49}$

c) $x^2 = \sqrt{5}$

d) $3u^2 - 128 = u^2$

19. Bestimme die Definitionsmenge des Wurzelterms.

a) $\sqrt{x+5}$

b) $\sqrt{6-x}$

c) $\sqrt{x^2+1}$

d) $\sqrt{\sqrt{x}-2}$

▲ 20. Welche reellen Zahlen lösen die folgenden Gleichungen?

a) $\sqrt{x^2} = x$

b) $\sqrt{x^2} = |x|$

c) $\sqrt{(-x)^2} = x$

d) $\sqrt{(-x)^2} = |-x|$

4 Umformen von Wurzeltermen

Alle Gesetze, die du für das Rechnen mit rationalen Zahlen kennen gelernt hast, gelten auch für reelle Zahlen. Zusätzlich gibt es spezielle Gesetze für das Rechnen mit Wurzeln bzw. Wurzeltermen.

Für alle folgenden Umformungen gilt: Die Radikanden dürfen nie negativ sein. Durch Null darf man nicht teilen. Wird durch eine Wurzel geteilt, so muss deren Radikand positiv sein.

$$(W1) \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \quad (W2) \sqrt{a} : \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (W3) \sqrt{a^2} = |a| = (\sqrt{|a|})^2$$

Beispiel 1 Anwendung der Gesetze W1 bis W3

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6 & \text{b) } \sqrt{75} : \sqrt{3} = \sqrt{\frac{75}{3}} = \sqrt{25} = 5 \\ \text{c) } \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{24}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 24}{8}} = \sqrt{9} = 3 & \text{d) } \frac{\sqrt{(-3)^2}}{\sqrt{3^2}} = \frac{|-3|}{|3|} = \frac{3}{3} = 1 \end{array}$$

Beispiel 2 Teilweises Wurzelziehen: Zerlege den Radikanden so in ein Produkt, dass einer der beiden Faktoren eine möglichst große Quadratzahl ergibt.

$$\text{a) } \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5 \cdot \sqrt{2} \quad \text{b) } \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4 \cdot \sqrt{3}$$

Aufgaben 21. Vereinfache mithilfe der Gesetze (W1) bis (W3).

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \sqrt{2} \cdot \sqrt{32} & \text{b) } \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} & \text{c) } \sqrt{0,5} \cdot \sqrt{8} & \text{d) } \sqrt{40} \cdot \sqrt{10} \\ \text{e) } \sqrt{0} \cdot \sqrt{11} & \text{f) } \sqrt{8} \cdot \sqrt{18} & \text{g) } \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{8}} & \text{h) } \sqrt{\frac{27}{20}} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} \end{array}$$

$$22. \quad \text{a) } \sqrt{18} : \sqrt{2} \quad \text{b) } \sqrt{125} : \sqrt{5} \quad \text{c) } \sqrt{2} : \sqrt{0,5} \quad \text{d) } \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$$

$$23. \quad \text{a) } \frac{\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{75} \cdot \sqrt{3}} \quad \text{b) } \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{2,5}} \quad \text{c) } \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{15} \cdot \sqrt{5} \quad \text{d) } \sqrt{(-2) \cdot (-18)}$$

24. Vereinfache durch teilweises Wurzelziehen.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \sqrt{8} & \text{b) } \sqrt{300} & \text{c) } \sqrt{72} & \text{d) } \sqrt{12a^2} \\ \text{e) } \sqrt{\frac{5}{9}} & \text{f) } \sqrt{98} & \text{g) } \sqrt{\frac{32}{9}} & \text{h) } \sqrt{243} \end{array}$$

Einen positiven Vorfaktor unter die Wurzel bringen: Schreibe den positiven Vorfaktor v als die Wurzel $\sqrt{v^2}$ und wende dann das Gesetz (W1) an.

Beispiel 3

a) $2 \cdot \sqrt{5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{20}$

b) $v \cdot \sqrt{2} = \sqrt{v^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2v^2}$

Wurzelterme ausmultiplizieren und ausklammern

Beispiel 4

a) $(\sqrt{2} + \sqrt{8}) \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = 2 + \sqrt{16} = 2 + 4 = 6$

b) $(\sqrt{3} - \sqrt{12})^2 = (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{12} + (\sqrt{12})^2 = 3 - 2 \cdot \sqrt{36} + 12 = 3$

c) $5\sqrt{2} + \sqrt{8} = 5 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{4 \cdot 2} = 5 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{2} = (5 + 2) \cdot \sqrt{2} = 7 \cdot \sqrt{2}$

Einen Nenner rational machen: Erweitere den Bruch mit dem Wurzelterm, der im Nenner steht, und vereinfache Nenner und Zähler anschließend.

Beispiel 5

a) $\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{b}$

25. Bringe den Vorfaktor unter die Wurzel.

Aufgaben

a) $2 \cdot \sqrt{7}$

b) $0,5 \cdot \sqrt{20}$

c) $\frac{2}{3} \cdot \sqrt{27}$

d) $b \cdot \sqrt{\frac{a}{b}}$

26. Multipliziere aus und vereinfache.

a) $\sqrt{3} \cdot (\sqrt{12} + \sqrt{27})$

b) $(\sqrt{5} + \sqrt{20}) \cdot \sqrt{5}$

c) $(2 + \sqrt{5}) \cdot \sqrt{80}$

27. Wende die binomischen Formeln an.

a) $(\sqrt{2} + \sqrt{32})^2$

b) $(\sqrt{20} - \sqrt{5})^2$

c) $(\sqrt{7} + 2) \cdot (\sqrt{7} - 2)$

28. Beseitige die Wurzelterme im Nenner.

a) $\frac{3}{\sqrt{5}}$

b) $\frac{4}{\sqrt{11}}$

c) $\frac{2}{-\sqrt{3}}$

d) $\frac{1}{\sqrt{a}}$

e) $\frac{5}{2\sqrt{5}}$

f) $\frac{1}{2 - \sqrt{3}}$

Tipps zu f): Erweitere mit $2 + \sqrt{3}$ und wende die 3. binomische Formel an.

▲ 29. Begründe mithilfe der Gesetze (W1) bis (W3) folgende Umformungen.

a) $\sqrt{a^2 \cdot b} = |a| \cdot \sqrt{b}$

b) $\sqrt{\frac{a}{b^2}} = \frac{\sqrt{a}}{|b|}$

c) $\sqrt{\frac{a^2}{b}} = \frac{|a|}{\sqrt{b}}$

d) $\sqrt{a^2 b^4} = |a| \cdot b^2$

e) $(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 = \frac{1}{2}$

f) $\sqrt{a^2 + 2a + 1} = |a + 1|$

Seite 15 ◀

- ▲ 10. Das Quadrat hat eine Seitenlänge von 2 cm und somit einen Flächeninhalt von 4 cm^2 . Ein Vergleich mit Aufgabe 9 zeigt: Ein Quadrat, dessen Seiten so lang sind wie die Diagonale in dem 2 cm-Quadrat, hat einen Flächeninhalt von $4 \text{ cm}^2 + 4 \text{ cm}^2 = 8 \text{ cm}^2$. Die eingezeichnete Diagonale hat also eine Länge von $\sqrt{8}$ cm. Durch die Konstruktion wird die Zahl $\sqrt{8}$ markiert.

Seite 16 ◀

11. z. B. $\sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{5}; \sqrt{6}; \sqrt{7}; \sqrt{8}; \sqrt{10}; \sqrt{11}$
12. a) rationale Zahlen: $\sqrt{25} = 5$; $-\sqrt{36} = -6$; **2,3478**; **4,57832**
 irrationale Zahlen: $\sqrt{7}$; **-3,1010010001...**
- b) $-\sqrt{36} < -3,1010010001... < 2,3478 < \sqrt{7} < 4,57832 < \sqrt{25}$

Seite 17 ◀

13.

linke Intervallgrenze	rechte Intervallgrenze	Begründung
3	4	$3 < \sqrt{12} < 4$, denn $3^2 < 12 < 4^2$
3,4	3,5	$3,4 < \sqrt{12} < 3,5$, denn $3,4^2 < 12 < 3,5^2$
3,46	3,47	$3,46 < \sqrt{12} < 3,47$, denn $3,46^2 < 12 < 3,47^2$
3,464	3,465	$3,464 < \sqrt{12} < 3,465$, denn $3,464^2 < 12 < 3,465^2$
3,4641	3,4642	$3,4641 < \sqrt{12} < 3,4642$, denn $3,4641^2 < 12 < 3,4642^2$

Ergebnis: $\sqrt{12} \approx 3,464$

14. a) Diese Aussage ist wahr. Man kann z. B. zu zwei verschiedenen reellen Zahlen den Mittelwert berechnen. Dieser liegt stets zwischen ihnen.
- b) Diese Aussage ist falsch, denn alle natürlichen Zahlen sind zugleich auch reelle Zahlen.
- c) Es gibt zwar Produkte aus zwei irrationalen Zahlen, die wieder eine irrationale Zahl ergeben. Trotzdem ist diese Aussage falsch, denn es gibt auch Produkte aus zwei irrationalen Zahlen, die eine rationale Zahl ergeben, z. B. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ oder $\sqrt{3} \cdot (-\sqrt{3}) = -3$.
- ▲ d) Diese Aussage ist richtig. Du kannst dir das so erklären: Eine rationale Zahl ist entweder eine abbrechende oder eine periodische Dezimalzahl. Addierst du hierzu eine irrationale Zahl, also eine nicht abbrechende und nicht periodische Dezimalzahl, so wird das Ergebnis ebenfalls wieder eine nicht abbrechende und nicht periodische Dezimalzahl ergeben, also eine irrationale Zahl.
 Kurz gesagt: rationale Zahl + irrationale Zahl = irrationale Zahl.
 Zu jeder rationalen Zahl kannst du also (beliebig) viele irrationale Zahlen finden, indem du z. B. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ usw. addierst.

15. a) = b) ≠ c) = d) = e) ≠ f) = Seite 18 ◀

16. a) 7 b) existiert nicht c) 1
 d) $3^2 = 9$ e) 4 f) $10^3 = 1000$

17. a) $L = \{-9; 9\}$ b) $L = \{-12; 12\}$ c) $L = \{ \}$ Seite 19 ◀
 d) $L = \{-5; 5\}$ e) $L = \{-4; 4\}$ f) $L = \{ \}$
 g) $L = \{-\sqrt{17}; \sqrt{17}\}$ b) $L = \{-3; 3\}$

18. a) $L = \{0\}$ b) $L = \{-\frac{5}{7}; \frac{5}{7}\}$ c) $L = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$ d) $L = \{-8; 8\}$

19. a) $D = \{x \in \mathbb{R} | x \geq -5\}$ b) $D = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 6\}$
 c) $D = \mathbb{R}$ d) $D = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 4\}$

▲ 20. a) $L = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ b) $L = \mathbb{R}$
 c) wie a): $L = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ d) wie b) : $L = \mathbb{R}$

21. a) $\sqrt{2 \cdot 32} = 8$ b) $\sqrt{8 \cdot 2} = 4$ c) $\sqrt{4} = 2$ d) $\sqrt{400} = 20$ Seite 20 ◀
 e) $\sqrt{0} = 0$ f) $\sqrt{144} = 12$ g) $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$ h) $\sqrt{\frac{81}{100}} = \frac{9}{10}$

22. a) $\sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$ b) $\sqrt{25} = 5$ c) $\sqrt{4} = 2$ d) $\sqrt{9} = 3$

23. a) $\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{225}} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ b) $\sqrt{16} = 4$ c) $\sqrt{\frac{1}{3} \cdot 15 \cdot 5} = 5$ d) $\sqrt{36} = 6$

24. a) $\sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ b) $\sqrt{100 \cdot 3} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{3} = 10\sqrt{3}$
 c) $6\sqrt{2}$ d) $2|a| \cdot \sqrt{3}$ e) $\frac{1}{3}\sqrt{5}$
 f) $7\sqrt{2}$ g) $\frac{4}{3}\sqrt{2}$ h) $9\sqrt{3}$

25. a) $\sqrt{28}$ b) $\sqrt{0,5^2 \cdot 20} = \sqrt{5}$ c) $\sqrt{\frac{4}{9} \cdot 27} = \sqrt{12}$ d) $\sqrt{b^2 \cdot \frac{a}{b}} = \sqrt{ab}$ Seite 21 ◀

26. a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{27} = \sqrt{36} + \sqrt{81} = 6 + 9 = 15$
 b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{20} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{25} + \sqrt{100} = 5 + 10 = 15$
 c) $2 \cdot \sqrt{80} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{80} = 2 \cdot \sqrt{16 \cdot 5} + \sqrt{5 \cdot 80} = 2 \cdot 4\sqrt{5} + \sqrt{400} = 8\sqrt{5} + 20$

27. a) $(\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{32} + (\sqrt{32})^2 = 2 + 2\sqrt{64} + 32 = 2 + 16 + 32 = 50$
 b) $(\sqrt{20})^2 - 2 \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 20 - 2\sqrt{100} + 5 = 20 - 20 + 5 = 5$
 c) $(\sqrt{7})^2 - 2^2 = 7 - 4 = 3$